*Лабораторная работа №1 – Множества и доказательства*

**Цель работы:** Научиться работать с множествами, осуществлять операции над ними.

Задание №1. Пусть X — множество всех студентов университета. Пусть A — множество студентов первого года обучения, B — множество студентов второго года обучения, C — множество студентов, изучающих дискретную математику, D — множество студентов, специализирующихся в международных отношениях, E — множество студентов, побывавших на концерте в понедельник вечером, а F — множество студентов, которые во вторник занимались до двух часов дня. Используя обозначения теории множеств, опишите следующие множества студентов.

(а) Все студенты второго года обучения, изучающие дискретную математику.

{x ∈ X : x ∈ B и x ∈ C}.

(b)Все студенты первого года обучения, которые во вторник занимались до двух часов дня.

{x ∈ X : x ∈ B и x ∈ F}.

(c) Все студенты, специализирующиеся в международных отношениях, которые в понедельник вечером побывали на концерте.

{x ∈ X : x ∈ D и x ∈ E}.

(d)Все студенты второго года обучения, которые во вторник занимались до двух часов дня и не специализируются в международных отношениях.

{x ∈ X : x ∈ B и x ∈ F и x ∉ D}.

(e) Все студенты первого и второго годов обучения, которые не ходили в понедельник вечером на концерт, но которые специализируются в международных отношениях.

{x ∈ X : (x ∈ A или x ∈ B) и x ∉ Е и x ∈ D}.

(f) Все студенты, которые обучаются первый год и специализируются в международных отношениях, или которые во вторник занимались до двух часов дня.

{x ∈ X : x ∈ B и (x ∈ D или x ∈ F)}.

Задание №2. Найдите, по крайней мере, два способа заменить многоточия в данных описаниях множеств.

(a) {1, 3,... , 31}. {2n-1: 1 ≤ n ≤ 31 и n ∈ ℕ}, {3n+1: 0 ≤ n ≤ 10 и n ∈ Z};

(b) {1, 2,... , 26}. {n: 1 ≤ n ≤ 26 и n ∈ ℕ}, {-n: -26 ≤ n ≤ -1 и n ∈ Z};

(c) {2, 5,... , 32}. {3n+2: 0 ≤ n ≤ 10 и n ∈ Z}, {2-3n: -10 ≤ n ≤ 0 и n ∈ Z}.

Задание №3. Приведите три описания элементов множества {2, 5, 8, 11, 14}.

1) {2+3(n-1): 1 ≤ n ≤ 5 и n ∈ ℕ}

2) {3n+2: 0 ≤ n ≤ 4 и n ∈ Z}

3) {2-3n: -4 ≤ n ≤ 0 и n ∈ Z}

Задание №4. Сколько элементов содержит каждое из следующих множеств?

(a) A = ∅. Ответ: 0

(b)B = {∅}. Ответ: 1

(c) C = {{0, 1}, {1, 2}}. Ответ: 2

(d)D = {0, 1, 2, {0, 1}, {1, 2}, {0, 1, 2}, A}. Ответ: 7

(e) E = {0, {{1, {3, 5}, {4, 5, 7}, 8}}}. Ответ: 2

Задание №5. Какие из следующих пар множеств равны? Для каждой пары неравных множеств найдите элемент, который входит в одно множество, и не входит в другое.

(a) {0, 1, 2} и {0, 0, 1, 2, 2, 1}. Ответ: Равны

(b){0, 1, 3, {1, 2}} и {0, 1, 2, {2, 3}}. Ответ: Разные элементы: 3, {1, 2}, 2, {2, 3}

(c) {{1, 3, 5}, {2, 4, 6}, {5, 5, 1, 3}} и {{3, 5, 1}, {6, 4, 4, 4, 2}, {2, 4, 4, 2, 6}}. Ответ: Равны

(d){{5, 3, 5, 1, 5}, {2, 4, 6}, {5, 1, 3, 3}} и {{1, 3, 5, 1}, {6, 4, 2}, {6, 6, 4, 4, 6}}. Ответ: Разные элементы: {4, 6}

(e) ∅ и {x ∈ ℕ: x > 1 и x^2 = x}. Ответ: Равны

(f) ∅ и {∅}. Ответ: Разные элементы: ∅

Задание №6. В этой задаче речь идет о следующих множествах:

A = {0, 2, 4, 6}, B = {1, 3, 5}, C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, D = ∅ E = ℕ F = {{0, 2, 4, 6}}.

(a) Перечислите подмножества множества A.

Ответ: {0}, {2}, {4}, {6}, {0, 2}, {0, 4}, {0, 6}, {2, 4}, {2, 6}, {4, 6}, {0, 2, 4}, {0, 4, 6}, {2, 4, 6}, {0, 2, 4, 6}, {∅}

(b)Перечислите подмножества множества B.

Ответ:{1}, {5}, {3}, {1,5}, {1,3}, {5,3}, { 1, 5, 3 }, {∅}.

(c) Перечислите подмножества множества C.

Ответ:{0}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {0, 1}, {0, 2}, {0, 3}, {0, 4}, {0, 5}, {0, 6}, {0, 7}, {1, 2}...{1,7},

{2, 3}...{2,7}...{6,7}, {0, 1, 2}, {0, 1, 3}...{0, 1, 7}, {0, 2, 3}...{0, 2, 7}...{5,6,7}, {0, 1, 2, 3}...{0, 1, 2, 7}…

...{4, 5, 6, 7},{0, 1, 2, 3, 4, 5}...{2, 3, 4, 5, 6, 7}, {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}…{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, {∅}.

(d)Перечислите подмножества множества D.

Ответ:∅

(e) Перечислите подмножества множества E.

Ответ: {1}...{n},{1,1}...{n,n}, {1,1...1}...{n,n...n}, ℕ, {∅},{{∅}},...{...{∅}...}

(f) Перечислите подмножества множества F.

Ответ: {0, 2, 4, 6}, {∅}

Задание №7. Пусть A = {n: n ∈ ℕ и n = 2k + 1 для некоторого k ∈ ℕ}, B = {n: n ∈ ℕ и n= 4k + 1 для некоторого k ∈ ℕ} и С = {m ∈ ℕ: m = 2k – 1 и k ∈ ℕ и k ≥ 1}. Докажите следующие утверждения.

(a) 35 ∈ A. 35 = 2\*12+1, k=12, k ∈ ℕ, значит 35 ∈ A

(b) 35 ∈ C. 35 = 2\*13 – 1, k=13, k ∈ ℕ, значит 35 ∈ C

(c) 35 ∉ B. k = (35-1)/4, число k не натуральное, а значит 35 ∉ B

Задание №8. Пусть A = {n: n ∈ ℕ и n = 3k + 2 для некоторого k ∈ ℕ}, B = {n: n ∈ ℕ и n= 5k – 1 для некоторого k ∈ ℕ такого, что k ≥ 5} и C = {m ∈ ℕ: m = 6k – 4 и k ∈ ℕ и k > 1}. Докажите следующие утверждения.

(a) C ⊆ A. n = 6k – 4 = 3j + 2, тогда j = (6k – 6)/3 = 3k-3, j ∈ ℕ при k > 1, таким образом C ⊆ A.

(b) A ≠ B. 5 ∈ A и 5 ∉ B, значит A ≠ B

(c) B ≠ C. 8 ∈ B и 8 ∉ B, значит B ≠ C

(d) A ≠ C. 5 ∈ A и 5 ∉ C, значит A ≠ C

(e) C ⊂ A. Т.к 5 ∈ A и 5 ∉ C и C ⊆ A, значит C ⊂ A.

Задание №9. Расскажите, чем отличаются множества ∅ и {∅}.

Первое это пустое множество, а второе это множество элементом которого является пустое множество, у первого множества 0 элементов, у второго — 1.

Задание №10. Пусть A, B и C — некоторые множества.

(a) Докажите, что если A ⊂ B и B ⊆ C, то A ⊂ C.

Если A ⊂ B, то любой x ∈ A также x ∈ B, при этом существует такой k ∈ B, который k ∉ A. Если  
B ⊆ C, то любой y ∈ B также y ∈ C. Тк любой x ∈ B, тогда каждому x ∈ A соответствует y ∈ B, а тк любой y ∈ C, при этом существует такой k ∈ C, который k ∉ A, тогда любой x ∈ C, и k ∈ C но k ∉ A, следовательно A ⊂ С.

(b)Докажите, что если A ⊆ B и B ⊂ C, то A ⊂ C.

Если A ⊆ B, то любой x ∈ A также x ∈ B. Если B ⊂ C, то любой y ∈ B также y ∈ C, при этом существует такой k ∈ С, который k ∉ B. Тк любой x ∈ B, тогда каждому x ∈ A соответствует y ∈ B, а тк любой y ∈ C, при этом существует такой k ∈ C, который k ∉ B и соответственно k ∉ A, тогда любой  
x ∈ C, и k ∈ C но k ∉ A, следовательно A ⊂ С.

(c) Докажите, что если A ⊆ B и A ⊊ C, то B ⊊ C

Если A ⊆ B, то любой x ∈ A также x ∈ B. Если A ⊊ C, то существует такой x ∈ A, который x ∉ C. Тк любой x ∈ B, но при этом существует такой x ∉ C тогда B ⊊ C.

Задание №11. Пусть A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10}, B = {2, 3, 6, 8} и C = {3, 5, 4, 8, 2}.

Найдите выписанные множества:

(a) B ∪ C = {2, 3, 6, 8, 5, 4}.

(b) B ⋂ C = {2, 3, 8}.

(c) B – C = {6}.

(d) A – B = {1, 4, 5, 7, 9,10}.

(e) A – C = {1, 6, 7, 9, 10}.

Задание №12. Пусть U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {0, 1, 2, 3}, B = {0, 2, 4} и C = {0, 3, 6, 9}.

(a) Найдите:

A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4},

A ⋂ B = {0, 2},

A = {4, 5, 6, 7, 8, 9},

(A⋂B) = {1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

(B ∪ C) – A = {6, 9, 4}.

(b) Найдите P (A), P (B), P (A ⋂ B), P (A) ⋂ P (B).

P (A) = {∅,{0},{1},{2},{3},{0,1},{0,2},{0,3},{1,2},{1,3},{2,3},{0,1,2},{0,1,3},{0,2,3},{1,2,3},{0,1,2,3}}

P (B) = {∅,{0},{2},{4},{0,2},{0,4},{2,4},{0,2,4}}

P (A ⋂ B) = {∅,{0},{2},{0, 2}}

P (A) ⋂ P (B) = {∅,{0},{2},{0,2}}

(c) Верно ли, что P (A ∪ B) = P(A) ∪ P(B)? Объясните ваш ответ.

Нет, неверно, дело в том, что множество P(A ∪ B) = {0, 1, 2, 3, 4} содержит в себе 25 элементов, а вот множество P (A) 24 элементов и P (B) 23, тогда множество P(A) ∪ P(B) имеет 24 элемента без вычета повторяющихся, что меньше, чем в множестве P (A ∪ B).

(d)Почему не имеет смысла запись P(A)?

P(A) есть множество всех подмножеств A, поэтому запись P(A) это дополнение множества P(A) до некоторого универсального ножества Up, которое не определено, а раз оно не определено, то и само P(A) не определено.

Задание №13. Пусть A = {0, 3}, В = {x, y, z}. Найдите выписанные множества:

(a) A × B = {(0,x), (0,y), (0,z), (3,x), (3,y), (3,z)}

(b) A × A × B = {(0,0,x),(0,0,y),(0,0,z),(0,3,x),(0,3,y),(0,3,z),(3,0,x),(3,0,y),(3,0,z),(3,3,x),(3,3,y),(3,3,z)}

(c) B × A = {(x,0),(x,3),(y,0),(y,3),(z,0),(z,3)}

(d) B × A × B = {(x,0,x),(x,0,y),(x,0,z),(x,3,x),(x,3,y),(x,3,z),(y,0,x),(y,0,y),(y,0,z),(y,3,x),(y,3,y),(y,3,z),(z,0,x),(z,0,y),(z,0,z),(z,3,x),(z,3,y),(z,3,z)}

Задание №14. Пусть X = {2, 4}, Y = {1, 4} и Z = {0, 4, 8}. Постройте следующие множества:

(a) X × Y= {(2,1),(2,4),(4,1),(4,4)}

(b) X × Y × Z = {(2,1,0),(2,1,4),(2,1,8),(2,4,0),(2,4,4),(2,4,8),(4,1,0),(4,1,4),(4,1,8),(4,4,0),(4,4,4),(4,4,8)}

(c) Y × Z = {(1,0),(1,4),(1,8),(4,0),(4,4),(4,8)}

(d) Z × Y × X = {(0,1,2),(0,1,4),(0,4,2),(0,4,4),(4,1,2),(4,1,4),(4,4,2),(4,4,4),(8,1,2),(8,1,4),(8,4,2),(8,4,4)}

(e) Z × X × Y = {(0,2,1),(0,2,4),(0,4,1),(0,4,4),(4,2,1),(4,2,4),(4,4,1),(4,4,4),(8,2,1),(8,2,4),(8,4,1),(8,4,4)}

Задание №15. Найдите три множества A, B, и C такие, что A ⊆ B ∪ C, но A ⊊ B и A ⊊ C.

A = {1,2}

B = {1}

C = {2}

{1,2} ⊊ {1} тк 2 ∉ B, {1,2} ⊊ {2} тк 1 ∉ C, {1,2} ⊆ {1,2} тк 1 ∈ А и 2 ∈ В.

Задание №16. Пусть A = {1,2, {{1,2}}}.

(a) Сколько элементов входит в A? Сколько элементов входит в P(A)? Сколько элементов входит в P(P(A))?

|A| = 3, |P(A)| = 8, |P(A)| = 256

В пунктах (b)–(m) выясните, верно ли каждое из утверждений, и, если

оно не верно, объясните почему.

(b) 1 ∈ A. Верно

(c) {1, 2} ∈ A. Неверно, в множестве A всего три элемента 1, 2, и {{1,2}}

(d) {{1, 2}} ∈ A. Верно

(e) ∅ ∈ A. Верно

(f) 1 ∈ P (A). Неверно, в множестве P(A) находятся только подмножества А, туда входит {1}

(g) {1, 2} ∈ P (A). Верно

(h) {{1, 2}} ∈ P (A). Верно

(i) ∅ ∈ P (A). Неверно, в множестве P(A) находятся только подмножества А, туда входит {∅}

(j) 1 ∈ P (P (A)). Неверно, в множестве P(P(A)) находятся только подмножества P(А), туда входит {{1}}

(k) {1, 2} ∈ P (P (A)). Неверно, в множестве P(P(A)) находятся только подмножества P(А), туда входит {{1, 2}}

(l) {{1, 2}} ∈ P (P (A)). Верно

(m) ∅ ∈ P (P (A)). Неверно, в множестве P(P(A)) находятся только подмножества P(А), туда входит {{∅}} или {∅}

Задание №17. Какие из следующих утверждений верны? Докажите каждое из верных утверждений. Опровергните каждое неверное утверждение, подобрав контрпример.

(a) Множества A и B не пересекаются тогда и только тогда, когда не пересекаются множества B и A.

Верно, тк по свойству A ⋂ B = B ⋂ A

(b)Множества A ∪ B и C не пересекаются тогда и только тогда, когда верны оба следующих утверждения: (i) A и C не пересекаются, и (ii) B и C не пересекаются.

Верно, по свойству: C ⋂ (A ∪ B) = (C ⋂ A) ∪ (C ⋂ B), тогда A ∪ B и C пересекаются тогда, когда выполняется хотя бы одно из (i) и (ii), значит они не пересекаются тогда, когда оба утверждения неверны.

(c) Множества A ⋂ B и C не пересекаются тогда и только тогда, когда верны оба следующих утверждения: (i) A и C не пересекаются, и (ii) B и C не пересекаются.

Неверно, пример: A = {1,2} B = {1,3}, A ⋂ B = {1}, C = {2, 3}, тут A ⋂ C = {2}, B ⋂ C = {3}, оба условия неверны, однако множества А ⋂ В и С не пересекаются.

(d)Множества A ∪ B и C не пересекаются тогда и только тогда, когда верно хотя бы одно из следующих утверждения: (i) A и C не пересекаются, и (ii) B и C не пересекаются.

Неверно, пример: A = {1,2} B = {1,3}, A ⋂ B = {1}, C = {2, 3}, тут A ⋂ C = {2}, B ⋂ C = {3}, оба условия неверны, однако множества А ⋂ В и С не пересекаются.

(e) Множества A ⋂ B и C не пересекаются тогда и только тогда, когда верно хотя бы одно из следующих утверждения: (i) A и C не пересекаются, и (ii) B и C не пересекаются.

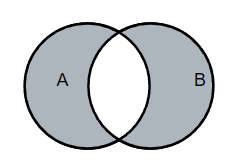
Неверно, пример: A = {1,2} B = {3,4}, A ⋂ B = ∅, C = {2, 3}, тут A ⋂ C = {2}, B ⋂ C = {3}, оба условия неверны, однако множества А ⋂ В и С не пересекаются.

(f) Пусть U – универсальное множество, A, B ⊆ U. Множества A и B не пересекаются тогда и только тогда, когда и не пересекаются A и B.

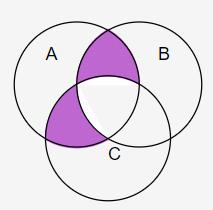
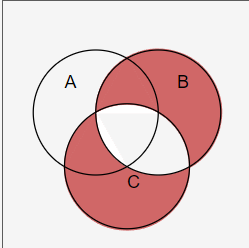
Неверно, пример: U = {1,2,3}, A = {1}, B = {2}, A = {2, 3} B = {1, 3} множества A и B пересекаются, однако A и B не пересекаются.

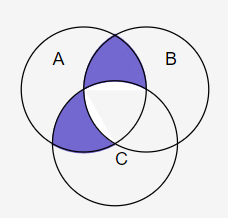
Задача №18. В пунктах (a) и (b) докажите сформулированные утверждения. В пунктах (c) и (d) приведите контрпримеры, опровергающие эти утверждения.

(a) A ⊕ B = (A ∪ B) – (A ⋂ B). С помощью диаграммы Эйлера-Венна:



(b) A ⋂ (B ⊕ C) = (A ⋂ B) ⊕ (A ⋂ C). С помощью диаграммы Эйлера-Венна:

 (B ⊕ C) A ⋂ (B ⊕ C)

(A ⋂ B) ⊕ (A ⋂ C)

(c) (A ⋂ B) ⊕ (C ⋂ D) ⊆ (A ⊕ C) ⋂ (B ⊕ D). Пусть A = {1,2}, B ={2,3}, C= {1,2}, D=∅, тогда {2}⊆∅, что неверно

(d) (A ∪ B) ⊕ (C ∪ D) ⊆ (A ∪ C) ⊕ (B ∪ D). Пусть A = {1,2}, B ={1,2}, C= {1,3}, D=∅ тогда {2,3}⊆{3}, что неверно

Задача №19. Даны четыре произвольных целых числа x1, x2, x3 и x4, ни одно из которых не четно и не кратно пяти. Докажите, что некоторое последовательное произведение этих целых чисел оканчивается цифрой 1. В последовательное произведение входит один, или два, или три, или все четыре множителя подряд, причем в том порядке, в котором они перечислены в списке x1, x2, x3, x4.

Запишем несколько членов последовательного произведения натуральных чисел:

10! = 1\*2\*3\*4\*5\*6\*7\*8\*9\*10

Уберем из этого последовательного произведения четные и кратные 5 и назовём ее x:

x = 1\*3\*7\*9

Мы получили последовательное произведение 4 целых чисел, разберем каждый случай, когда в последовательное произведение входит 1 множитель:

1) x=1, подходит 2) x=3 не подходит 3) x=7 не подходит 4) x=9 не подходит

Нашли один случай, значит для одного числа выполняется.

Теперь разберем каждый случай, когда в последовательное произведение входит 2 множителя:

1) x = 1\*3 = 3, 1 на конце нет

2) x = 3\*7 = 21 есть единица на конце

3) x = 7\*9 = 63 не подходит

Нашли один случай, значит для двух чисел выполняется.

Теперь разберем каждый случай, когда в последовательное произведение входит 3 множителя:

1) x = 1\*3\*7 = 21, есть единица на конце

2) x = 3\*7\*9 = 189 не подходит

Нашли один случай, значит для трех чисел выполняется.

Теперь разберем каждый случай, когда в последовательное произведение входит 4 множителя:

1) x = 1\*3\*7\*9 = 189 не дает единицу

Делаем вывод: расписывать последовательно произведение дальше 10 не имеет смысла, тк на значение последней цифры числа будет влиять только последние цифры множителей, а этот набор множителей всегда будет состоять из элементов множества {1,3,7,9}, например: 9, 11, 13, 17 или 13, 17, 19, 21. Все эти наборы всегда дадут нам 9 в конце числа. Однако, по условию задачи сказано, что набор может состоять из 1, 2 и 3 чисел, а как мы убедились до этого, с помощью такого количества можно получить цифру 1 на конце, причем количество таких последовательных чисел бесконечно. Например для трех: 11 13 17 или 21 23 27 и. тд. А значит некоторое произведение этих чисел заканчивается на 1.